

# 立体の「もと」大発見

編集委員・高橋真理子

立体の世界にも、水素や酸素のような**元素**があった。ある種の立体の仲間は、1種類の五面体の組み合わせだけで作れる。複数の**元素**からできた**化合物**の立体グループもある。**立体の元素**なんて聞いたことがないが、最近、日本の数学愛好家と数学者のチームが見つけた。ひょっとして**世紀の大発見**？

## ◇平行多面体は元素数1である

「立体の世界にも元素がある」と考え、いくつかの定理を証明したのは、長髪にバンダナ姿で知られる数学者の**秋山仁さん**と、宮城県立がんセンター病理部長で**アマチュア数学者の佐藤郁郎さん**だ。秋山さんがモスクワやブダペストの学会で発表すると評判は上々で、論文はハンガリーの数学専門誌に掲載されることが決まっているという。

**立体にも「元素」があった**

単一の元素だけでできている立体グループ  
**平行多面体**  
 平行移動させて空間を隙間なく埋めつくせる

立方体 斜六角柱 切頂八面体 菱形十二面体 長菱形十二面体

**ペンタドロン(元素)**  
 互いに鏡に映した関係にあるペアの両方を使う

立方体 (12個) 斜六角柱 (144個) 切頂八面体 (48個) 展開図 長菱形十二面体 (384個) 菱形十二面体 (192個)

4種類の元素が必要な立体グループ  
**正多面体**  
 正四面体 (面の形=正三角形) 正六面体 (正方形) 正八面体 (正三角形) 正十二面体 (正五角形) 正二十面体 (正三角形)

数学者の秋山仁さん

グラフィック白田 邦 / The Asahi Shimbun

元素の数が1とわかったのは、**平行多面体**と呼ばれる立体グループだ。代表的なものは立方体。前後左右縦横とコピーをどんどんつないでいくと、**空間を埋め尽くすことができる**特徴を持つものだ。このグループの仲間は**すべて、ある五面体から作れる**。

すべてといっても平行多面体は、実は五つしかない。ロシアの結晶学者フョードロフが1885年に証明した。結晶の中を見る技術など何もなかった時代に生まれた、見事な定理だ。

それから120年余たって、予想外の新事実が飛び出した。発見のきっかけを作ったのは、山口県在住で中学校に木製の正多面体セットを贈る活動をしている中川宏さん(53)だった。

木工好きの中川さんは、立方体の辺を削ってできた立体の名前を知りたいとウェブで調べているうち、佐藤さんと知り合った。

佐藤さんは35歳のとき「研究費がなくなって病理実験ができなくなったので、数学でも研究しようか」と一念発起。以来20年、病理医として働く傍ら、時間があれば

ば数学の問題を考え、15年前から成果をウェブで公表している。秋山さんの「老後は数学を学べ」(朝日ワンテーママガジン『あぶない数学』)を読んで励まされ、研究上の交流も続けてきた。

## ◇命名「ペンタドロン」

2006年、中川さんが平行多面体の一つ、切頂八面体を24等分した立体を96個合わせると、別の平行多面体・菱形十二面体が作れることを見つけた。「立体を切ったりつなげたりゴチャゴチャやってたらできちゃった。佐藤先生にお知らせしたら、先生も驚いていました」

等分してできたのは六面体。これをさらに半分に割った五面体（これが後に秋山さんに**ペンタドロン**と名付けられる）から立方体も作れた。だが、残る二つの平行多面体は中川さんにはどうやっても作れない。

その後は数学者の仕事となった。「無理だろう」という見方が強かった中で、プロとアマが共に頭をひねり、すべてを作れると証明した。

**ペンタドロンには、右手と左手のように互いに鏡に映した関係にあるペアの両方がある。**平行多面体は、このペアだけで作れる。水素という元素だけで作れる物質のようなものだ。**平行多面体は元素数1である**というのが秋山さんたちの大発見だ。

## ◇芸術展でデビュー

「平行多面体の元素」は芸術作品としてもデビューした。昨年5月に東京・銀座の吉井画廊で開いた展覧会「秋山仁のジオメトリカル・アート 幾何学的美」で、中川さんの作品が展示されたのだ。

実は、平行多面体は現実の世界によく現れる。私たちの体の細胞は、体内を隙間なく埋め尽くしているから、**切頂八面体**に似ている。泡もたくさん集まれば、個々の形はやはり切頂八面体に似る。

物理学者の北原和夫・東京理科大教授は「物質の構造の基本を突き詰めると、点ではなく、広がりを持つ構造が現れる。結晶もそうだし、もっとミクロな世界でもそうだ。今回の発見は、物質の基本構造とどこかでつながっているのかもしれない」と面白い。

ギリシャ時代からもっとも有名な立体集団といえば「正多面体」だ。面がすべて正多角形のこのグループは、これまた五つしかない。こちらは3種類以下の元素ですべてを形作ることはできず、「元素数は4」と証明されているのだそう。つまり、水素だけでなく、酸素、窒素、炭素が必要な化合物みたいなものだ。

秋山さんは今春、母校の東京理科大の理数教育研究センター長に就いた。これからも数学と芸術、遊びと勉強、すべてを融合した作品や定理を仲間とともに作っていきたいと意欲を燃やしている。当面の目標は、他の多面体グループの元素を見つけ出すことだ。

## ■筆者の高橋真理子さんの編集後記■

東海大学教育開発研究所から母校・東京理科大に移ったという挨拶状を秋山仁さんから頂戴し、新しい研究室にお邪魔したのがコトの発端でした。数学オリンピックに日本が初めて参加した1990年から（つまり、有名になる前から）存じ上げている秋山さんですが、お目にかかるのは久しぶりです。そこで「立体にも元素がある」という話が出ました。最初は「???'」でしたが、**5種類の立体が一つのひしゃげた5面体ですべて作れる**というのは、理屈抜きに面白い。しかも、ちゃんと数学の専門誌に論文が載ることが決まっているというではありませんか。

論文を書いたのは3年前、でも雑誌がいつ出るのかはわからないのだそうです。「数学の世界では、それほど珍しいことじゃない」。このゆったり感。何とも魅力的です。秋山先生のお考えのポイントは、「立体のグループ」に対して「元素」と名付ける最小単位が存在すると見いだしたことです。

一つひとつの立体であれば、いくらでも細かく分けることができます。この場合、数学的に最小単位は求められません。いくらでも小さくできるのですから。しかし、複数の立体が含まれる「グループ」については、そのグループにある立体すべてを形作ることができる最小単位を探すことができます。

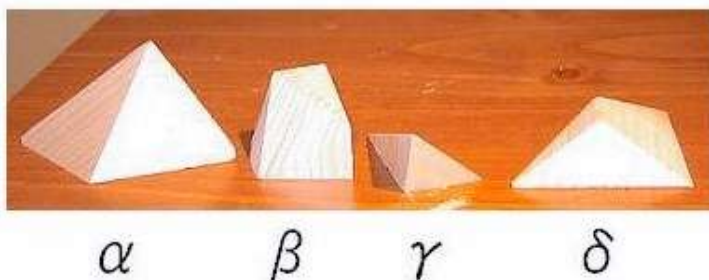
探してみたら、平行多面体と呼ばれるグループは元素数1、正多面体のグループは元素数4だったわけです。紙面のイラストに、当初は**正多面体の元素**も盛り込もうとしたのですが、かえってわかりにくくなってしまうと判断して、やめました。

「科学面によろこそ」にいらしてくださった皆さんには、ご覧にいれましょう。ここにある $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$ という4つが**正多面体の元素**です。

でも、正多面体の元素はこれに限らない。つまり、正多面体は元素セットが複数あることがすでにわかっているのだそうです。

秋山先生の次なる目標は、「アルキメデスの多面体」や「ジョンソンの多面体」の元素探し。それってどんな多面体?と思った方は、恐縮ですが、数学辞典などでお調べくださいますよう。

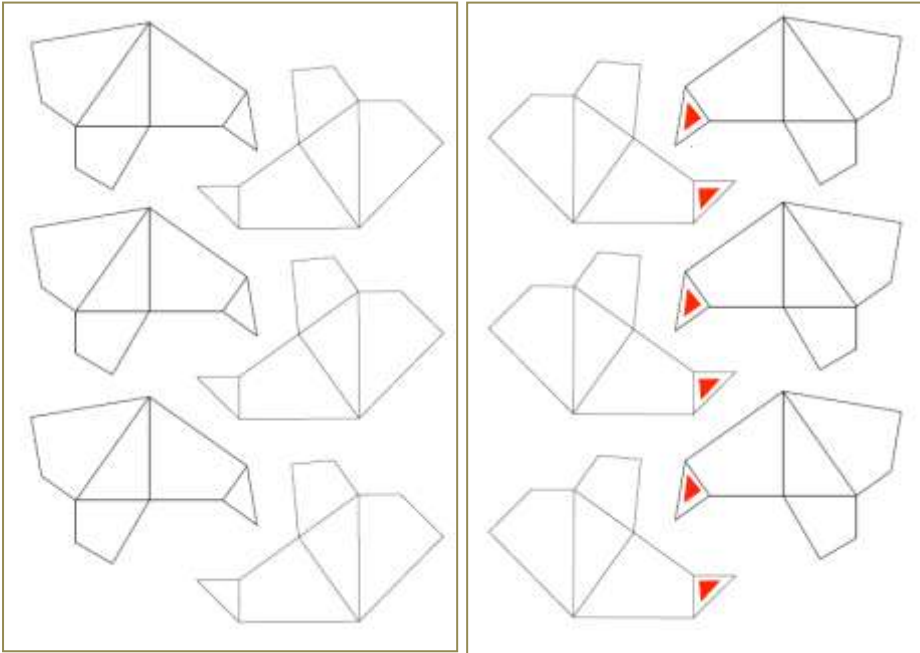
## 正多面体の元素





# ペンタドロン、本当に立体の「もと」？作ってみました！

まずはペンタドロンの展開図を作ります！ペンタドロンは右手と左手のような鏡像ペア。  
展開図はむずかしいのだ！（「科学ひろば」でPDF版をダウンロードできます）



← ペンタドロン  
まずは2個  
(1ペア)完成

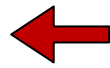


← **ペンタドロン6個**  
紙テープで貼り合わせながら  
組み立てます。

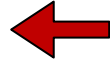


← **ペンタドロン12個！！**  
組み合わせると立方体になった！

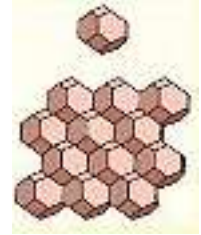
**次は切頂八面体に挑戦！**  
**ペンタドロンは48個必要！！**



出来た！  
ペンタドロン 48 個、  
**切頂八面体の完成！**



切頂八面体 5 個を重ねてみたところ。  
空間を隙間なく埋め尽くす  
イメージがよく分かりました。



立体的なイメージがつかみにくい時は  
どんどん実験してみよう！

